

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI FIRENZE

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE FISICHE E NATURALI
TESI DI LAUREA TRIENNALE IN FISICA

ANNO ACCADEMICO 2010-2011

RAPPRESENTAZIONI DEL GRUPPO DI LORENTZ
ED
EQUAZIONI D'ONDA RELATIVISTICHE

CANDIDATO: LORENZO RASPOLINI

RELATORE: PROF. DANIELE DOMINICI
dominici@fi.infn.it

Nel lavoro viene mostrato l'omomorfismo esistente tra il gruppo $SL(2, \mathbb{C})$ e la componente connessa del gruppo di Lorentz dopo aver messo in luce quello tra $SU(2)$ ed il gruppo delle rotazioni in tre dimensioni. Lo scopo del lavoro di tesi è quello di esplorare la relazione che esiste tra la teoria della rappresentazione del gruppo di Lorentz e l'equazione d'onda relativistica sviluppata da Dirac nel 1928 per particelle di spin $\frac{1}{2}$, come gli elettroni. Si vede infatti come l'equazione di Dirac possa essere derivata da considerazioni sulle proprietà di trasformazione di oggetti particolari, gli spinori, sotto il gruppo di Lorentz e si può vedere (vedi Weinberg) che anche le equazioni di Maxwell e Proca possono essere ottenute in maniera analoga.

Nella prima parte si richiamano i concetti principali riguardo ai gruppi di Lie ed alla teoria della rappresentazione mettendo in luce la loro rilevanza in fisica. Si passa poi ad esplorare i gruppi $O(3)$ ed $SU(2)$ e si introducono gli spinori di Pauli a due componenti come oggetti con una ben definita regola di trasformazione sotto rotazioni. Questo ci porta a determinare la corrispondenza tra una trasformazione $SU(2)$ nello spazio spinoriale (ξ_1, ξ_2) ed una trasformazione $O(3)$ nello spazio (x, y, z) che risulta espressa da

$$U = e^{i\boldsymbol{\sigma} \cdot \frac{\boldsymbol{\theta}}{2}} = \cos \frac{\theta}{2} + i\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \sin \frac{\theta}{2} \longleftrightarrow R = e^{i\mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\theta}}.$$

Una volta ricavata questa connessione si procede con uno studio approfondito della struttura del gruppo di Lorentz e della sua algebra. Passate in rassegna le varie rappresentazioni del gruppo (quadrivettoriale, tensoriali, aggiunta) ci soffermiamo sulle rappresentazioni spinoriali. Si trova che data una generica trasformazione di Lorentz Λ esistono due differenti spinori a due componenti, i quali corrispondono alle rappresentazioni $(\frac{1}{2}, 0)$ e $(0, \frac{1}{2})$ del gruppo $SO(3, 1)$, ovvero il sottogruppo ortocrono proprio del gruppo di Lorentz. Facciamo quindi vedere come l'equazione di Dirac

$$(\gamma^\mu p_\mu - m)\psi(p) = 0$$

emerga come relazione fra questi spinori una volta specificata la trasformazione del quadrispinore $\psi = (\phi_R, \phi_L)$, che risulta una rappresentazione irriducibile del gruppo di Lorentz estesa per parità, sotto un boost di Lorentz. Di seguito si fa vedere come procedendo in modo analogo, ma lavorando nella rappresentazione *standard* delle matrici γ (invece che in quella *chirale* utilizzata per ricavare l'equazione), si costruiscono spinori corrispondenti ad un arbitrario stato di moto di una particella di Dirac.

La parte finale è dedicata a sottolineare l'importanza del gruppo di Lorentz inomogeneo, o gruppo di Poincarè. Andando ad esaminare il cosiddetto metodo di Wigner mettiamo in mostra che lo spin corrisponde alla simmetria sotto il gruppo $SU(2)$ soltanto se P_μ è un quadrivettore di tipo-tempo ($m^2 > 0$). Consideriamo la classificazione degli stati di particella singola in accordo con le loro trasformazioni sotto il gruppo di Poincarè ed andando ad analizzare in particolare il caso di massa zero si mostra infine come lo spin per una particella di massa nulla sia qualcosa di diverso rispetto al caso di particelle massive.