

Scopo della tesi è di presentare il paradosso di Klein e, successivamente, spiegare come si possa a volte descrivere la dinamica di atomi ultrafreddi intrappolati in reticoli ottici per mezzo di un'equazione di Dirac efficace, simulando effetti quanto-relativistici quali appunto il Klein tunneling.

Nel 1929, Oskar Klein mostrò che se si analizza con l'equazione di Dirac il processo di diffusione di elettroni su di un gradino di potenziale si ottengono soluzioni di tipo onda piana nella zona in cui è presente il potenziale V_0 sia se $V_0 < E - mc^2$ che se $V_0 > E + mc^2$. Questo porta a coefficienti di trasmissione e riflessione anomali per potenziali arbitrariamente grandi. Il risultato, che appare a prima vista inspiegabile sia dal punto di vista classico che quantistico, è legato all'esistenza delle soluzioni ad energia negativa. In particolare nel caso del Klein tunneling, se viene attivata un'energia maggiore di $2mc^2$ in uno spazio minore della lunghezza d'onda Compton, la conseguente creazione di coppie particella-antiparticella spiega l'apparente paradosso. Tuttavia, poiché occorrerebbero campi elettrici dell'ordine di $10^{18}V/m$, questo effetto non è stato verificato sperimentalmente per le particelle elementari.

Nella prima parte della tesi si riportano i calcoli che portano al paradosso di Klein e se ne fornisce inoltre una spiegazione qualitativa facendo uso della nozione di mare di Dirac.

La seconda parte della tesi inizia con un richiamo delle principali caratteristiche dei sistemi periodici non relativistici.

In seguito, seguendo il procedimento proposto in un articolo¹ del 2011, si mostra come in certi casi la dinamica di un sistema periodico unidimensionale possa essere descritta dall'equazione di Dirac. Il caso analizzato nella tesi è quello di atomi intrappolati nei minimi del potenziale di un reticolo ottico bicromatico. In tale sistema si possono avere due bande energetiche, in particolare la seconda e la terza banda, degeneri (punto di Dirac) o quasi al centro della zona di Brillouin. Grazie a questo fatto la legge di dispersione di tali bande assume la caratteristica forma relativistica $\varepsilon_{1,2}(k) = \pm\sqrt{m^2c^4 + \hbar^2k^2c^2}$, dove k è il quasimomento, e m e c sono rispettivamente la massa (direttamente proporzionale al gap tra le due bande) e la velocità della luce efficaci. L'interesse per tali sistemi sorge dal fatto che la massa efficace può essere variata in modo molto preciso così da poter ridurre i campi critici necessari per far emergere il Klein tunneling.

Per la trattazione formale risulta utile introdurre gli stati di Wannier di banda singola e composta, che sono una base ortonormale e completa dello spazio di Hilbert. In questa base, dato che le funzioni di Wannier possono essere molto localizzate intorno ai siti reticolari, è possibile, utilizzando l'approssimazione *coarse-grain*, sostituire al quasimomento k l'operatore impulso \hat{p} nell'equazione di moto. Usando questo risultato si dimostra che la dinamica del sistema periodico è descritta in modo efficace dall'equazione di Dirac libera.

Per simulare il Klein tunneling viene poi aggiunto un potenziale lentamente variabile che serve a rappresentare il gradino di potenziale. Per tale sistema viene presentata una simulazione numerica fatta dagli autori dell'articolo in cui si confronta la dinamica di Schrödinger con quella di Dirac per 3 diversi valori della massa efficace. Il risultato mostra l'accordo qualitativo tra le due trattazioni e che il coefficiente di trasmissione aumenta al diminuire di m .

L'ultimo paragrafo della tesi è dedicato a una giustificazione qualitativa di tale effetto mediante le equazioni della dinamica semiclassica per un pacchetto d'onda soggetto a un potenziale periodico più un potenziale lineare. Infatti se il pacchetto è inizialmente localizzato nella banda superiore con un quasimomento positivo risulta (per la legge di dispersione relativistica) che, se non avviene una transizione verso la banda inferiore, quando k diventa negativo la velocità di gruppo si inverte e pertanto si ha riflessione. Se il pacchetto riesce invece a transire verso la banda inferiore la sua velocità non si inverte e si ha trasmissione. Quindi, poiché la probabilità di transizione aumenta al diminuire della gap tra le due bande (ovvero minore risulta m), il coefficiente di trasmissione aumenta al diminuire di m . In conclusione quindi, mettendo in corrispondenza la banda superiore con gli stati di particella e quella inferiore con gli stati di antiparticella si ha una analogia con la spiegazione qualitativa del tunneling data nella prima parte della tesi in termini del mare di Dirac.

¹D. Witthaut et al., Phys. Rev. A **84**, 033601 (2011).