

Proprietà di entanglement di una catena di spin finita

(Entanglement properties of a finite size spin chain)

RELATORE: Prof. Alessandro Cuccoli (alessandro.cuccoli@unifi.it) **CANDIDATO:** Andrea Aniello

A seguito dello sviluppo della teoria dell'informazione quantistica avvenuto negli ultimi decenni, ha acquisito grande importanza lo studio delle proprietà di entanglement di un sistema quantistico.

Mentre classicamente la conoscenza dello stato di un sistema composto equivale alla conoscenza dello stato dei suoi singoli componenti, a livello quantistico lo stato è rappresentato da un vettore di uno spazio di Hilbert che è il prodotto tensoriale degli spazi di Hilbert relativi ai suoi sottosistemi: se tale vettore è un semplice prodotto tensoriale di stati relativi ai singoli sottosistemi, lo stato complessivo si dice *separabile*. Quando però, come accade in generale per il principio di sovrapposizione, ciò non si verifica, lo stato è detto *entangled*, e la proprietà che distingue un tale stato da uno stato separabile è l'*entanglement*. Una buona misura dell'entanglement per un sistema composto da due qubits, ovvero da sistemi con uno spazio di Hilbert bidimensionale, è la *concurrence*.

In questo lavoro di tesi vengono studiate le proprietà di entanglement dello stato fondamentale di una catena di spin $\frac{1}{2}$ composta da un numero piccolo e pari di spin ($N=2, 4, 6$), andando a valutare la concurrence tra coppie di spin. Il modello considerato prevede un'interazione di scambio, eventualmente anisotropa, tra spin primi vicini e la presenza di un campo magnetico statico. Si discutono i risultati al variare delle condizioni ai bordi (catena aperta o chiusa), dei parametri in gioco nel problema (γ , il fattore di anisotropia nel piano xy , Δ , il fattore di anisotropia lungo z , e h , il campo magnetico esterno), e infine della lunghezza della catena. Nel caso di due soli spin, il problema è affrontato in modo analitico e si trova l'andamento della concurrence in funzione del campo, dapprima nel modello isotropo ($\gamma=0$, $\Delta=1$), quindi nel modello XY0 ($\gamma=0.5$, $\Delta=0$) e infine nel modello di Ising in campo trasverso ($\gamma=1$, $\Delta=0$), sia per il ferromagnete che per l'antiferromagnete. Per le catene di quattro e sei spin si è ricorso al calcolo numerico usando il software *Mathematica*. In questi casi, si studia l'entanglement nel modello XY0 e nel modello di Ising dapprima per le coppie di primi vicini (spin centrali e spin estremi) e poi per la coppia di spin "secondi vicini" 1-3, sia nella catena aperta che in quella periodica. Infine, nella catena aperta di sei spin, si considera anche la concurrence tra il secondo e il terzo spin.

Si nota che, prendendo sia una coppia di spin primi vicini che anche coppie non contigue della catena chiusa, la concurrence assume un valore sempre più vicino a zero all'aumentare del numero dei componenti della catena per un particolare valore del campo esterno, in corrispondenza del quale lo stato risulta dunque "quasi" separabile. Si è quindi verificato che, essendo i primi due spin della catena aperta molto entangled tra loro, la concurrence del primo spin con i rimanenti è inferiore rispetto a quella della coppia estrema. Inoltre si è visto che lo spin estremo, interagendo con un solo spin a differenza degli altri, risente molto più del campo esterno: e infatti la concurrence della coppia estrema varia molto col campo.

Per il modello di Ising, si osserva una sostanziale differenza tra il caso di due spin (laddove lo stato è massimamente entangled nel limite di campi prossimi a 0) e quello di quattro e sei spin (dove la concurrence è nulla per $h \rightarrow 0$ ed ha un andamento molto regolare in funzione del campo). Infine, anche per quanto concerne le proprietà di entanglement, il comportamento degli spin centrali della catena aperta tende tanto più ad uniformarsi a quello degli spin primi vicini della catena chiusa quanto più lunga è la catena stessa, com'è naturale pensando che, all'aumentare del numero dei componenti della catena, la coppia centrale avverte sempre meno l'effetto delle diverse condizioni al contorno.