

## Oscillazioni stocastiche in un modello preda-predatore

### Stochastic oscillations in a prey-predator model

Le equazioni preda-predatore sono un tipico esempio di modello dinamico di popolazione, comunemente adottato come schema di riferimento per l'analisi quantitativa degli ecosistemi. I cicli preda-predatore rappresentano uno degli esempi di dinamica collettiva emergente più studiato in letteratura. Come mostrato da Mckane e Newman, operando nel contesto di una formulazione stocastica è possibile ottenere soluzioni collettive auto-organizzate, i quasi-cicli, prodotti dall'amplificazione risonante di effetti di taglia finita. Le oscillazioni nelle concentrazioni osservate sperimentalmente potrebbero quindi trovare un'adeguata rappresentazione nel contesto di un modello stocastico generalizzato, oltre al classico scenario descrittivo d'ispirazione deterministica usualmente proposto in letteratura. In questo lavoro di tesi abbiamo preliminarmente introdotto gli aspetti formali e le tecniche matematiche che caratterizzano le discipline dei sistemi dinamici e dei processi stocastici. In seguito abbiamo introdotto il modello preda-predatore analizzato da Mckane e Newman e studiato il relativo sistema di equazioni differenziali per le concentrazioni  $\phi$  (predatori) e  $\psi$  (prede). Dall'analisi di stabilità lineare il sistema risulta possedere un punto fisso stabile non banale  $(\tilde{\phi}; \tilde{\psi})$ . Le proprietà di convergenza dello stato stazionario sono state caratterizzate nel dettaglio, evidenziando come il comportamento della soluzione dipenda dalla scelta dei parametri. La prima parte dell'elaborato si conclude osservando che la formulazione deterministica del modello preda-predatore esclude l'esistenza di comportamenti oscillanti, osservati sperimentalmente. La seconda parte del nostro lavoro muove dalla formulazione stocastica del modello preda-predatore. A partire dall'equazione maestra, attraverso opportune manipolazioni matematiche, è possibile ottenere nel limite continuo il sistema di equazioni differenziali deterministiche. Per caratterizzare gli effetti di taglia finita, dovuti alla discretezza del mezzo indagato, abbiamo operato un'approssimazione perturbativa nota in letteratura come sviluppo di Van Kampen. Al primo ordine perturbativo, si ricava nuovamente il limite deterministico del modello in esame. All'ordine successivo, si ottiene un'equazione di Fokker-Planck per l'evoluzione della distribuzione delle fluttuazioni. A partire da tale equazione è possibile calcolare per via analitica lo spettro di potenza delle fluttuazioni ottenute attorno alla soluzione deterministica di equilibrio. La stima teorica, in perfetto accordo con le simulazioni numeriche dirette del modello, ha permesso di rivelare la presenza di un picco isolato nello spettro di potenza, manifestazione diretta di quasi-cicli. Le oscillazioni sono il risultato di un effetto risonante che amplifica il rumore stocastico interno al sistema. Questo tipo di rumore non proviene da sorgenti esterne, ma è il prodotto diretto della discretezza del mezzo ed è pertanto intrinseco al modello nella sua versione stocastica.

**Relatore:** Dr. Duccio Fanelli - [duccio.fanelli@unifi.it](mailto:duccio.fanelli@unifi.it)

**Candidato:** Leonardo Miele - [leonardo.miele@stud.unifi.it](mailto:leonardo.miele@stud.unifi.it)