Università degli studi di Firenze

Equilibrio termodinamico in uno spaziotempo curvo: conservazione del tensore energia-impulso

Relatore:
Prof. Francesco Becattini

Candidato:
Marco Marinucci

Abstract

Nello spazio-tempo curvo della relatività generale la nozione di equilibrio termodinamico richiede che esista un quadrivettore di tipo tempo che soddisfi l'equazione di Killing

$$\nabla_\mu \beta_\nu + \nabla_\nu \beta_\mu = 0. \tag{1}$$

Questa condizione generalizza in modo corretto la familiare nozione di equilibrio termodinamico completo della fisica classica e special-relativistica, nelle quali all'equilibrio si impone che la temperatura e la velocità di un sistema siano le stesse ovunque. La lunghezza del quadrivettore, detto *quadrivettore temperatura*, e generalmente indicato con β, è interpretabile come l'inverso della temperatura locale mentre la sua direzione è interpretabile come la quadrivelocità locale u.

La distribuzione di energia ed impulso del sistema all'equilibrio è data dal *tensore energia-impulso* $T^{\mu\nu}$, la grandezza fisica tensoriale sorgente della gravitazione. Nel caso di un sistema all'equilibrio termodinamico usuale nello spazio-tempo di Minkowski, con $\beta = costante$, ha la forma nota come *ideale*, ovvero:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p) u_\mu u_\nu - p \eta_{\mu\nu} \tag{2}$$

dove ρ e p sono, rispettivamente, il significato fisico di densità di energia propria e di pressione.
La forma sopra è usualmente impiegata nelle equazioni di campo di Einstein in quasi tutti i problemi di astrofisica (es. equilibrio stellare) e cosmologici. Tuttavia, essa dipende in modo essenziale dalle simmetrie dello spaziotempo di Minkowski, ovvero traslazioni e rotazioni. In uno spaziotempo privo di simmetrie di questo tipo, la forma del tensore energia-impulso potrebbe essere diversa e dipendere, oltre che dal campo β e dalla metrica g (ricordiamo che $u = \beta/\sqrt{\beta^2}$ e che $T = 1/\sqrt{\beta^2}$) anche dalle derivate di β e di g. Questa possibilità è stata prevista in lavori precedenti.

Se dunque, la metrica - assegnata - dello spaziotempo non differisce molto da quella piatta, ci si può attendere che il tensore energia-impulso della materia all'equilibrio termodinamico sia dato dall'equazione sopra più termini correttivi dipendenti dalle derivate. Abbiamo perciò studiato le possibili forme di un tensore energia-impulso conservato in uno spaziotempo curvo con metrica assegnata sotto l'ipotesi di equilibrio termodinamico globale, cioè l'esistenza di un quadrivettore temperatura di tipo tempo di Killing. A priori, il tensore-energia impulso locale può dipendere da derivate del campo di quadritemperatura e della metrica di qualunque ordine e in qualsiasi potenza; ci siamo limitati a considerare termini aggiuntivi, oltre la forma cosiddetta ideale, di ordine 2, cioè al più quadratici nelle derivate covarianti del campo di Killing e lineari nei tensori di curvatura.

Lo scopo era quello di determinare alcune relazioni che i coefficienti dei suddetti termini correttivi devono soddisfare in seguito all'imposizione delle equazioni di conservazione covarianti del tensore $T^{\mu\nu}$, ovvero $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$.

È così emerso che, mentre i coefficienti indipendenti oltre quelli "ideali" di ordine più basso sono 14, da considerarsi tutti funzioni termodinamiche della temperatura locale $T = 1/\sqrt{\beta^2}$, l'equazione di conservazione $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ produce 9 condizioni e dunque i coefficienti indipendenti si riducono a 5.

Abbiamo poi esaminato due casi particolari in cui il risultato finale varia in maniera poco significativa: nel caso in cui si imponga che il tensore di Riemann sia nullo, si hanno 7 coefficienti di cui solo 4 sono indipendenti; nel secondo caso, con derivata covariante di β nulla, si ha che il numero di coefficienti si riduce a 7 e il numero di variabili indipendenti rimane 5, come nel caso generale.