Contenuto della Tesi :

“La Funzione di Wigner in meccanica quantistica”.

Studente: Emanuele Frosini Recapito: emafrosini@virgilio.it

Relatore: Prof. Riccardo Giachetti Recapito: giachetti@fi.infn.it

Nella letteratura fisica si trovano varie di proposte di formulazione della meccanica quantistica sullo spazio delle fasi, a partire dal lavoro di Wigner del 1932, in cui veniva introdotta una funzione di distribuzione per derivare delle correzioni quantistiche proprio all’equazione di Boltzmann. Il vantaggio più immediato che tali proposte sembrano offrire è un uso più ampio del linguaggio e della modellizzazione ‘classica’ dei fenomeni fisici: in molti casi questo può indubbiamente contribuire a rendere più familiari molti aspetti del mondo microscopico per mezzo di schematizzazioni intuitive. Inoltre, da un punto di vista formale, non richiede in maniera esplicita l’introduzione di operatori e i valori di aspettazione delle quantità fisicamente rilevanti si possono calcolare usando distribuzioni che sono determinate da usuali equazioni differenziali e integrali. Si riesce dunque a spiegare il discreto successo che hanno avuto queste teorie in vari campi della fisica. L’oggetto principale che interviene in queste teorie è dunque una funzione di distribuzione sullo spazio delle fasi. Fino dalla prima formulazione di Wigner, è risultato subito chiaro che non c’è un’unica scelta possibile per la funzione di distribuzione dato che, come abbiamo già detto, in meccanica quantistica il principio di indeterminazione non permette la nozione di probabilità congiunta in un punto dello spazio delle fasi: la distribuzione, o meglio ‘una’ funzione distribuzione appare piuttosto uno strumento utile per calcolare i valori di aspettazione di grandezze fisiche. In molti casi, poi, non vale nemmeno il parallelo con la probabilità classica, poichè queste funzioni non sono sempre definite positive e vengono perciò chiamate distribuzioni di ‘quasiprobabilità’. Lo scopo di questa tesi è di esporre alcune delle principali caratteristiche della funzione di Wigner. Cominciamo così, nella prima sezione, col dare la definizione della funzione di Wigner per mezzo della trasformata di Weyl, che stabilisce un legame tra gli operatori di Schrödinger e le variabili dinamiche classiche sullo spazio delle fasi. Viene introdotta la nozione di matrice densità e la distinzione tra stati puri e stati misti. Si mostra poi l’uso della funzione di Wigner per il calcolo dei valori medi di osservabili quantistiche. Viene successivamente affrontato il problema dell’evoluzione temporale dove si determina una equazione generale che contiene le correzioni quantistiche sviluppate in serie della costante di Planck. Questo sviluppo interverrà nella breve discussione conclusiva sulle difficoltà del limite classico. Si esplicita poi il caso dell’oscillatore armonico che può essere seguito in tutti gli aspetti, dato che per quello (come per tutti i sistemi descritti da Hamiltoniane quadratiche) il calcolo semiclassico produce il risultato esatto. Troviamo, in particolare, che l’equazione di evoluzione della funzione di Wigner per l’oscillatore armonico è l’equazione classica di Liouville. Nella terza sezione si introducono gli operatori di distruzione e di creazione e se ne dimostrano alcune importanti proprietà. Per il loro tramite, si definisce l’operatore di spostamento che si applica al cosiddetto ‘effetto Stark sull’oscillatore armonico’ e dà la prima idea di cosa siano gli stati coerenti. Questi ultimi sono ripresi in maggior dettaglio nella sezione successiva dove vengono caratterizzati come stati di minima indeterminazione con uguali valori di quest’ultima per posizione e impulso. Si calcola la funzione di Wigner e si osserva che nel limite in cui la costante di Planck diventa trascurabile, essa si riduce alla delta di Dirac di un punto dello spazio delle fasi classico. Nella sesta sezione mostriamo come la distribuzione rifletta bene le differenze tra gli stati puri e quelli misti. In particolare viene fatto un confronto tra gli ‘stati del gatto di Schrödinger’ (stati puri dati dalla sovrapposizione di due stati coerenti) e gli stati ottenuti dalla mistura di due stati coerenti. Introduciamo inoltre una nuova classe di stati di indeterminazione minima, ma diversa per la posizione e per l’impulso, detti ‘stati squeezed’. Nella conclusione, infine, facciamo alcune osservazioni sul limite classico mostrando in modo esplicito la ragione di qualche difficoltà.