

Random walk su rete: studio della transitività di un sistema

Candidato: Alberto Baldi

alberto.baldi1@stud.unifi.it

Relatore: Franco Bagnoli

franco.bagnoli@unifi.it

I processi stocastici, e in particolare i processi di Markov, sono molto importanti in vari campi della fisica e delle altre scienze. Nel caso di processi discreti, ovvero delle catene di Markov, si può rappresentare il processo come un cammino casuale (random walk) su un grafo. Siamo qui interessati al problema del raggiungimento di un determinato obiettivo (nodo) su tale grafo.

In termini più formali si può identificare il luogo dell'obiettivo, che l'agente casuale tende a raggiungere asintoticamente, con il nome di trappola, ovvero una zona di spazio dotata di condizioni al contorno assorbenti, in grado di impedire il successivo moto dell'agente. L'attrattività di una trappola è data dalla sua capacità di "assorbire" i camminatori. A partire da tale contesto, in questa tesi si studiano gli effetti di competizione e prevalenza tra due trappole indotti dal moto aleatorio di camminatori casuali su un supporto discreto.

Una proprietà inaspettata di alcuni processi stocastici è l'intransitività della prevalenza tra trappole: infatti una trappola A può prevalere su una trappola B , che a sua volta può prevalere su una trappola C , che infine sua volta può prevalere su A . A questo scopo l'attenzione si focalizzerà in particolar modo sullo studio delle proprietà di transitività di un sistema al variare dei parametri fondamentali di quest'ultimo, cercando di spiegare i risultati tramite analogie con l'esperienza comune.

Nel lavoro di tesi sono stati studiati dunque due processi di competizione tra trappole su rete, dopo aver introdotto gli strumenti matematici necessari alla comprensione dell'argomento: le catene di Markov e le basi della teoria dei grafi. In particolare, abbiamo analizzato le proprietà di intransitività del gioco di Penney e di un moto stocastico su un ciclo. Per quantificare questi effetti, è stato introdotto un parametro σ apposito, chiamato indice di intransitività. Si è osservato come il gioco di Penney, nella sua versione equa, sia un sistema totalmente intransitivo, e che il fatto di considerare trappole parzialmente assorbenti non sia sufficiente per eliminare l'intransitività del sistema. La presenza di una sottosequenza statisticamente dominante sulle altre può emergere soltanto da un mutamento della probabilità in gioco, oppure da un cambiamento di distribuzione iniziale di occupazione dei nodi: dunque si può affermare come tali fattori influenzino il sistema in modo molto più marcato rispetto all'assorbitività delle trappole.

Anche nel caso di una rete ciclica con un solo verso di percorrenza (dove, in linea teorica, ogni trappola può essere sempre oscurata da un'altra), la variazione dell'assorbitività non riesce a eliminare l'intransitività totale tipica del ciclo. In modo simile al gioco di Penney, per osservare un sistema transitivo si deve assumere che la distribuzione di probabilità iniziale di occupazione dei nodi sia disomogenea. Analogamente, la variazione del parametro η di simmetria della matrice di Markov, da sola non basta per fare in modo che la competizione tra trappole sul ciclo consenta valori negativi dell'indice di intransitività: in base alle simulazioni effettuate, la zona di transitività si presenta in un intorno di $\eta = \frac{1}{2}$, sempre nell'ipotesi in cui la distribuzione di probabilità iniziale non sia uniforme.

Le analisi effettuate sui due sistemi portano a ipotizzare che l'indice di intransitività σ di un sistema schematizzabile come random walk su rete possa dipendere soprattutto da due fattori: la probabilità con cui un agente casuale si può spostare sul grafo (se sono favoriti gli spostamenti soltanto in una determinata zona del grafo, allora il sistema mostrerà una certa transitività), e la distribuzione iniziale dei camminatori dei nodi, che se disomogenea permetterà un cambio del segno di σ , nel caso in cui il sistema di partenza sia totalmente intransitivo. Il fatto di considerare trappole parzialmente assorbenti o più versi di percorrenza (anche di velocità diversa) nella rete influenza soltanto il modulo dell'indice di intransitività.

Gli studi sull'intransitività di un sistema possono trovare applicazioni in teoria dei giochi e in analisi decisionale. Nel primo caso, tenendo conto della variazione dei parametri, la possibile presenza di transitività indica la possibilità di effettuare una strategia vincente da parte di un giocatore sugli altri, mentre nel secondo caso le trappole possono essere viste come le scelte alternative a cui un individuo tende asintoticamente, con i vari passi dell'agente casuale sulla rete corrispondenti alle varie fasi del processo decisionale.